Limite di una funzione composta

Richiamiamo dapprima il concetto di *composizione di funzioni* nel caso di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Poi vedremo qualche caso più generale.

Definizione di funzione composta Siano: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. La funzione H definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ da

$$H(x) := f(g(x)) \tag{1}$$

è detta *la funzione composta di* f *e* g (ed è a volte indicata anche come $H = g \circ f$). $\square$

Naturalmente la definizione può essere estesa, ad esempio, al caso in cui la funzione g sia definita su un intervallo $[a, b]$ ed abbia come immagine un intervallo $[c, d]$, mentre f è definita su $[c, d]$ (o su un suo sottoinsieme) con valori in $\mathbb{R}$.

Teorema sul limite della funzione composta

Siano

- a e b due numeri reali con $a < b$
- $x_0 \in]a, b]$
- g una funzione definita su $]a, b]$ (con eventuale esclusione del punto x_0) a valori in $\mathbb{R}$,
- I l'immagine di g
- $[c, d]$ un intervallo contenente I
- f una funzione definita su $[c, d]$ a valori in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che

- g abbia limite destro uguale a ℓ per $x \to a+$:

$$\lim_{x \to a+} g(x) = \ell. \tag{2}$$

- f sia **continua** in ℓ.

Allora (mucche, questa è la tesi!): la funzione composta $H(x) := f(g(x))$ ha limite per $x \to a+$ e si ha

$$\lim_{x \to a+} f(g(x)) = f(\ell) = f(\lim_{x \to a+} g(x)). \tag{3}$$

$\square$

Dimostrazione Riscriviamo la tesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in]a, a + \delta] \; : \quad |f(g((x)) - f(\ell)| \le \varepsilon. \tag{4}$$

Riscriviamo la (2):

$$\forall \varepsilon_g > 0 \; \exists \delta_g > 0 \; \forall x \in]a, a + \delta_g] \; : \quad g(x) \in [\ell - \varepsilon_g, \ell - \varepsilon_g] \tag{5}$$

e riscriviamo la condizione di continuità di f:

$$(6) \qquad \forall \varepsilon_f > 0 \ \exists \delta_f > 0 \ \forall y \in]\ell - \delta_f, \ell + \delta_f] \ : \quad |f(y) - f(\ell)| \leq \varepsilon_f.$$

Ora dimostriamo la (4). Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $\varepsilon_f := \varepsilon$ in (6) e da questa otteniamo un $\delta_f > 0$. A questo punto (attenzione, mucche!) prendiamo $\varepsilon_g := \delta_f$ nella (5) ottenendo un $\delta_g > 0$. Scegliamo quindi (finalmente) $\delta := \delta_g$ nella (4) e vediamo ora cosa succede se prendiamo (come appunto viene richiesto nella (4)) un

$$x \in]a + \delta] \equiv]a + \delta_g].$$

Usando la (5) otteniamo

$$g(x) \in [\ell - \varepsilon_g, \ell - \varepsilon_g]$$

che ricordando la scelta $\varepsilon_g := \delta_f$ possiamo anche scrivere come

$$g(x) \in [\ell - \delta_f, \ell - \delta_f].$$

A questo punto la (6) ci dice (prendendo $y = g(x)$) che $|f(y) - f(\ell)| \leq \varepsilon_f$, cioè

$$|f(g(x)) - f(\ell)| \leq \varepsilon_f$$

che conclude la dimostrazione. $\square$

Un risultato del tutto analogo può essere enunciato (e dimostrato) per il limite destro (in un punto $x_0 \in [a, b[$), oppure per il limite bilatero (in un punto $x_0 \in]a, b[$. In quest'ultimo caso, se aggiungiamo l'ipotesi che la g sia *continua* in x_0, l'enunciato può essere formulato come segue.

Continuità della funzione composta

Siano

- a e b due numeri reali con $a < b$
- $x_0 \in]a, b[$
- g una funzione definita su $]a, b[$ a valori in $\mathbb{R}$,
- I l'immagine di g
- $[c, d]$ un intervallo contenente I
- f una funzione definita su $[c, d]$ a valori in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che

- g sia continua in x_0.
- f sia **continua** in $f(x_0)$.

Allora (mucche, questa è la tesi!): la funzione composta $H(x) := f(g(x))$ è continua in x_0. $\square$

Osserviamo che non è possibile, nelle ipotesi del teorema sul limite della funzione composta, scambiare l'ipotesi di esistenza del limite (sulla g) con quella di continuità (della f). In altre parole, se supponiamo che la g sia continua in x_0 e che la f abbia limite per $y \to g(x_0)$, allora **non possiamo dedurre** che $H(x) = f(g(x))$ abbia limite per $x \to x_0$ (e, se anche l'avesse, non possiamo dedurre che il limite sia uguale al $\lim_{y \to g(x_0)} f(y)$).

Per convincerci, supponiamo che

$$f := |sign(y)|$$

(quindi $f(0) = 0$ e $f(y) = 1$ negli altri $y \neq 0$). Consideriamo quindi il caso in cui la g sia definita come

$$g(x) := x \sin(1/x) \text{ per } x \neq 0 \text{ e } g(0) := 0.$$

La funzione $g(x)$ si annulla quindi in zero e in tutti i punti del tipo $x = 1/(k\pi)$ con k intero (positivo o negativo), ed è invece diversa da zero in tutti gli altri punti. Conseguentemente, la $f(g(x))$ risulta uguale a zero in zero e in tutti i punti del tipo $x = 1/(k\pi)$ con k intero (positivo o negativo), ed è invece uguale a 1 in tutti gli altri punti. Visto che ci sono infiniti punti del tipo $x = 1/(k\pi)$ in ogni intorno (anche piccolissimo) di 0, ne deduciamo che il limite di $f(g(x))$ per $x \to 0$ *non esiste*. Supponiamo invece che (sempre con la stessa scelta di f) si abbia $g \equiv 0$. Allora avremmo che $f(g(x)) = 0$ per ogni x. Quindi il suo limite per $x \to 0$ sarà uguale a 0, che è diverso dal limite per $y \to 0$ della f (che invece fa 1).